

「新版微分積分」をテキストとする学生

第1設題 以下の極限值について、極限值が存在する場合にはその値を、存在しない場合はその理由を述べよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

第2設題 $y = (x^2 - 1)^n$ とおく。

このとき、 $(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0$ を示せ。

ただし、 $y^{(n)}$ は y の n 次導関数とする。

第3設題 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。このとき、導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ において不連続であることを示せ。

第4設題 以下の関数の導関数を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}, \quad (2) y = \frac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

第5設題 $a > 0$ のとき、平均値の定理を用いて

$$\log_e a + \frac{1}{a+1} < \log_e(a+1) < \log_e a + \frac{1}{a}$$

を示せ。

第6設題 以下の原始関数を求めよ。

$$(1) \int \sin 7x \cos 5x dx, (2) \int e^{ax} \sin bxdx (b \neq 0)$$

第7設題 以下の原始関数を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx, (2) \int (\log_e x)^2 dx$$

第8設題 以下の原始関数を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{x^3 + 1} dx, (2) \int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$$

第9設題 以下の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_e^{e^2} \log_e x dx, (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

第10設題 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ を求めよ。ただし、 m, n は正の整数。